Calculs en COQ pour TaMaDi

Ioana Paşca

14 Juin 2011

Plan

1. Calculer en Coq
2. Les réels exacts en Coq
3. Retour sur les modèles de Taylor : benchmarks

Calcul efficace en Coq

- structures de données
- algorithmes
- façon de calculer

Efficacité et structure de donées

Des nombres en COQ

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N
- les entiers machine : BigZ

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N
- les entiers machine : BigZ
- les rationnels : Q - basés sur Z

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N
- les entiers machine : BigZ
- les rationnels : Q - basés sur Z
- les flottants : basés sur Z ou BigZ

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N
- les entiers machine : BigZ
- les rationnels : Q - basés sur Z
- les flottants : basés sur Z ou BigZ
- les réels “exacts” : basés sur Z, BigZ ou Q

Des nombres en COQ

- les entiers naturels (Peano) : nat
- les entiers naturels binaires positifs: positive
- les entiers naturels binaires : N basés sur positive
- les entiers binaires : Z - basés sur N
- les entiers machine : BigZ
- les rationnels : Q - basés sur Z
- les flottants : basés sur Z ou BigZ
- les réels “exacts” : basés sur Z, BigZ ou Q
- les intervalles à borne flottante : basés sur les flottants

Exemples

- 14 : nat est
  S (S (S (S (S (S (S (S (S (S (S (S (S O))))))))))))
- 14 : positive est xO (xI (xI xH)), notation $1 \sim 1 \sim 1 \sim 0$
- 14 : Z est Zpos (xO (xI (xI xH)))
- 14 : BigZ est compilé vers un entier machine

Exemple - addition sur les nat

```
Fixpoint plus (n m : nat) : nat :=
  match n with
  | O => m
  | S p => S (p + m)
  end
where "n + m" := (plus n m).
```

2 + 3 = S (S 0) + S (S (S 0)) $\rightsquigarrow$ S (S 0 + S (S (S 0))) $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ S (S (0 + S (S (S 0)))) $\rightsquigarrow$ S (S (S (S (S 0)))) = 5

Exemple - addition sur les positive

```
Fixpoint Pplus (x y:positive) : positive :=
  match x, y with
    | p~1, q~1 => (Pplus_carry p q)~0
    | p~1, q~0 => (Pplus p q)~1
    | p~1, 1 => (Psucc p)~0
    | p~0, q~1 => (Pplus p q)~1
    | p~0, q~0 => (Pplus p q)~0
    | p~0, 1 => p~1
    | 1, q~1 => (Psucc q)~0
    | 1, q~0 => q~1
    | 1, 1 => 1~0
  end
with Pplus_carry (x y:positive) : positive := ...
```

Exemple - addition sur les BigZ

pour les bigZ, voir addition machine...

Morale

- La réprésentation d'un nombre influe sur l'efficacité du calcul.
- Le bibliothèques basées sur BigZ sont plus efficaces que celles basées sur Z.

Efficacité et algorithmes

Exemples

- flottants et intervalles flottants
  (voir présentation par Guillaume)
- réels exacts

Bibliothèque(s) des réels exacts

- Première version par Russel O'Connor

"Certified exact transcendental real number computation in COQ"

- Deuxième version par Robbert Krebbers et Bas Spitters

"Computer certified efficient exact reals in COQ"

Réels exacts - O'Connor

- approcher les fonctions sur les réels par des fonction sur les rationnels
- calculs faits sur nombres de type Q, donc sur des Z
- fonctions de base plus lentes que Coq-Interval
  (voir présentation de Ioana en février)

Réels exacts - Krebbers et Spitters

- approcher les fonctions sur les réels par des fonction sur les nombres dyadiques (de la forme $m \cdot 2^e$)
- calculs faits sur nombres dyadiques , basés soit sur Z, soit sur BigZ

Comparaisons

Réels exacts - Krebbers et Spitters

- par rapport à la version O'Connor :
  - utilisation des BigZ
  - algorithmes plus efficaces
  - moins de fonctions implementées

Comparaisons

Réels exacts - Krebbers et Spitters

- par rapport à la version O'Connor :
  - utilisation des BigZ
  - algorithmes plus efficaces
  - moins de fonctions implementées
- par rapport a Coq-Interval
  - gère la précision des calculs implicitement
  - algorithmes plus naifs que ceux pour les flottants

Benchmarks 1

Calcul d'un polynôme de Taylor pour l'exponentielle en 2 et sur des BigZ.

Degrée	Précision	Temps réels K-S (s)	Temps Coq-Interv.(s)
40	60	3	0.024
40	200	55	0.044
40	500	407	0.188

Benchmarks 1

Calcul d'un polynôme de Taylor pour l'exponentielle en 2 et sur des BigZ.

Degrée	Précision	Temps réels K-S (s)	Temps Coq-Interv.(s)
40	60	3	0.024
40	200	55	0.044
40	500	407	0.188

- la précision implicite mène à des calculs en très haute précision pour les premiers coefficients
- pas de bon moyen pour évaluer le reste, car pas d'intervalles

Efficacité et façons de calculer en Coq

Preview pour la présentation de Laurent

Calculer en COQ :

- `compute`
- `vm_compute`
- `native_compute`

Preview pour la présentation de Laurent

Calculer en COQ :

- `compute`
- `vm_compute`
- `native_compute`

Détails dans la présentation à suivre.

Retour sur l'approximation polynômiale en COQ

Rappels

Modèles de Taylor (voir présentation par Érik)

- implémentation générique
- choix de nombres pour les calculs
  - bibliothèque de calcul sur les intervalles
  - bibliothèque des réels exacts

Benchmarks 2

Calcul de modèles de Taylor sur la binade $[\frac{1}{2}, 1]$ sur 2^{11} intervalles, developpés au millieu de l'intervalle.

Modéle	Degrée	Précision	Entiers	Temps (min)	Taille (MB)
Exp	32	500	Z	122	28.7
Exp	45	500	Z	126	39.9
Exp	45	500	BigZ	12	39.8
Arctan	32	500	BigZ	36	28.7?
Cos	45	500	BigZ	18	40.1

Benchmarks 2

Calcul de modèles de Taylor sur la binade $[\frac{1}{2}, 1]$ sur 2^{11} intervalles, developpés au millieu de l'intervalle.

Modéle	Degrée	Précision	Entiers	Temps (min)	Taille (MB)
Exp	32	500	Z	122	28.7
Exp	45	500	Z	126	39.9
Exp	45	500	BigZ	12	39.8
Arctan	32	500	BigZ	36	28.7?
Cos	45	500	BigZ	18	40.1

Le même calcul pour l'exponentielle, degrée 45, fait en Sollya prend 105 secondes.

Benchmarks 3

Multiplication et de composition de deux modèles de Taylor sur [1,2] et developpés en $\frac{3}{2}$

Modéle	Degrée	Précision	Entiers	Temps (s)	Erreur
Exp	40	200	BigZ	0.048	2^{-202}
Exp * Exp	40	200	Z	6.7	2^{-160}
Exp * Exp	40	200	BigZ	0.65	2^{-160}
Exp $\circ$ Exp	40	200	Z	230	2^{-12}
Exp $\circ$ Exp	40	200	BigZ	25	2^{-12}
1/Exp	40	200	BigZ	24.5	2^{36}

Conclusions, discussions, remarques, perspectives, travail à faire

- extension de Coq-Interval
- optimisation pour la multiplication
- intégrer des listes persistantes
- récupérer et utiliser les résultats produits par Coq
- ajouter des fonctions
- finir les preuves
- ...