# Génération de coefficients de polynômes d'approximation sur des sous-intervalles, avec bornes d'erreur garanties

Vincent LEFÈVRE

Arénaire, INRIA Grenoble – Rhône-Alpes / LIP, ENS-Lyon

Journées TaMaDi, Sophia Antipolis, 2011-02-22

# Plan

- Introduction
- Approximation d'une fonction par un polynôme
- Vers des polynômes de plus petits degrés
- Passage d'un sous-intervalle au suivant
- Analyse d'erreur
- Futur

# Introduction

Contexte/but : résoudre le Dilemme du Fabricant de Tables dans un système à virgule flottante en base $\beta$ (2 ou 10) à précision $p$.

**Données :**

- Fonction mathématique $f$ sur un intervalle $I$, e.g. de la forme $[\beta^k, \beta^{k+1}[$ ou un sous-découpage (e.g. $2^{13}$ sous-intervalles).
- Entrées : valeurs $x_i$ en progression arithmétique sur $I$ (des nombres machine du système VF, ou des entiers après changement de variable).
- Sorties : valeurs approchées de $f(x_i)$, avec une borne d'erreur $\varepsilon_0$ garantie (imposée en entrée), e.g. $\varepsilon_0 \approx 2^{-30}$ ulp.

**Notes :**

- La fonction $f$ devra être « numériquement régulière » (pas $\sin x$ avec $x \gg \pi$).
- On n'aura pas besoin de calculer toutes les valeurs $f(x_i)$, mais le problème reviendra au même (du point de vue de la précision).
- On n'aura besoin que des valeurs modulo leur ulp.

# Plage d'exposants de sortie

- L'intervalle $I$ sera choisi de manière à ce que l'exposant des valeurs $f(x_i)$ de la fonction **change peu**, et dans l'idéal il ne change pas du tout.
- On se ramènera ainsi à du calcul en **virgule fixe**, beaucoup plus efficace que la virgule flottante, surtout dans ce contexte où...
- On pourra se ramener à du **calcul modulo l'ulp**, enfin presque, car l'ulp peut changer (on peut considérer le maximum pour le calcul, et le minimum pour le test interne, cf discussion dans ma thèse).

  Exposant minimum : `mmmmmm...mmmmmmmmtttt...ttttx`
  Exposant maximum : `mmmmmm...mmmmmmmmxxxxxtttt...ttttx`

Question pour plus tard : compromis entre le choix de la taille de $I$ et les variations de l'exposant de sortie ?

Le point essentiel : **virgule fixe modulaire**.

# Approximation d'une fonction par un polynôme

On va approcher la fonction $f$ par des polynômes.

- Je montrerai que cela permet d'avoir des algorithmes rapides.
- En plus, c'est compatible avec la virgule fixe modulaire.

**Problème initial : approcher la fonction $f$ par un polynôme $P$ sur $I$**, avec une borne d'erreur $\varepsilon_f$ garantie, typiquement une fraction de la borne d'erreur $\varepsilon_0$ finale.

Ce n'est pas le sujet de cet exposé $\rightarrow$ peu de détails dans ce qui suit. On suppose que l'on dispose d'outils fournissant les coefficients de l'approximation en question (et éventuellement une meilleure borne d'erreur $\varepsilon'_f < \varepsilon_f$).

On pourra faire d'autres approximations, avec une erreur bornée par $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon'_f$ (ou $\varepsilon_0 - \varepsilon_f$), par exemple :

- approcher $P$ par des polynômes de plus petit degré,
- approcher les coefficients par des valeurs à plus faible précision,
- effectuer les opérations de manière approchée.

# Approximation d'une fonction par un polynôme : implémentation actuelle

Implémentation actuelle : formule de Taylor.

Ce n'est pas la meilleure approximation, mais :

- facile et rapide (pour une approximation générique) à calculer ;
- l'erreur peut être facilement majorée ;
- bon compromis entre précision et rapidité de calcul (?) ;
- on peut déterminer le degré du polynôme dynamiquement (rappel : la borne d'erreur est fournie en entrée).

Conséquence par rapport à une approximation minimax : le degré est plus grand. Mais un découpage en sous-intervalles permettrait de faire diminuer le degré, cf approximations hiérarchiques (plus loin).

À faire : tests pour comparer les deux types de méthodes (ou autres).

# Approximation d'une fonction par un polynôme : détermination de l'erreur

- **Erreur d'approximation.** Par exemple : troncature de la série de Taylor. En posant $t = x - x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}t + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(d)}(x_0)}{d!}t^d + R(x)$$

avec $R(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(d+1)}(u)}{d!}(x-u)^d \,\mathrm{d}u$, donc $|R(x)| \leqslant \dfrac{M \cdot T^{d+1}}{(d+1)!}$, où $\left|f^{(d+1)}(u)\right| \leqslant M$ et $|t| \leqslant T$.

- **Arrondi des coefficients.** On peut cependant considérer les coefficients comme étant exacts,
  - soit parce que leur représentation à une précision fixée a été prise en compte dans l'algorithme d'approximation,
  - soit parce qu'on les considère initialement comme étant des réels. La raison : on va faire d'autres calculs approchés sur ces coefficients, et les majorations des erreurs d'arrondi pourront tenir compte des arrondis initiaux à ce moment-là.

# Vers des polynômes de plus petits degrés

Polynôme de degré $d$ sur $I \rightarrow$ se ramener à des **polynômes de petit degré** $d'$ sur intervalles $J_n$, pour efficacité ou par limitation (degré 1 pour le L-algorithme).

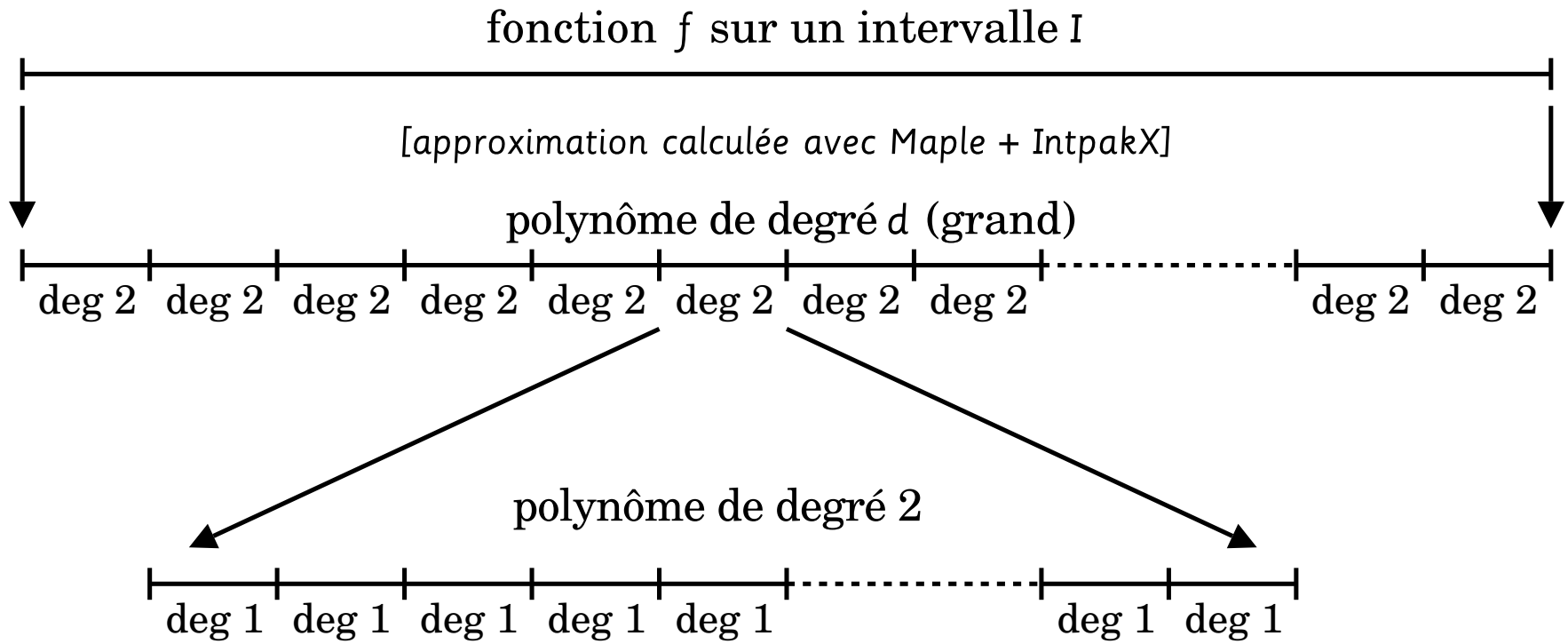
- Approximations valides sur de petits intervalles. Plus $d'$ est petit, plus les intervalles $J_n$ seront petits, et plus il y aura d'approximations à faire.
- Plus $d$ est grand, plus les approximations demanderont de calculs (en supposant que le coefficient de degré $d$ ne puisse pas être ignoré).

Pour déterminer rapidement les approximations :

- **Approximations hiérarchiques**, i.e. découper récursivement en sous-intervalles, et diminuer le degré $d$ à chaque découpage.
  - Avantage : la contribution des plus grands degrés est déterminée moins souvent (pour moins de sous-intervalles).
  - Inconvénient : on introduit *a priori* des erreurs supplémentaires.
- **Passer d'un intervalle $J_n$ au suivant**, i.e. utiliser le fait qu'on connaît une approximation dans l'intervalle précédent.

# Approximations hiérarchiques

Exemple d'implémentation ($\sim$ implémentation actuelle) :




Généralisation : découpage en un plus grand nombre de niveaux.

# Approximations hiérarchiques : exemple d'instantiation

Exemple simplifié pour donner des ordres de grandeurs...

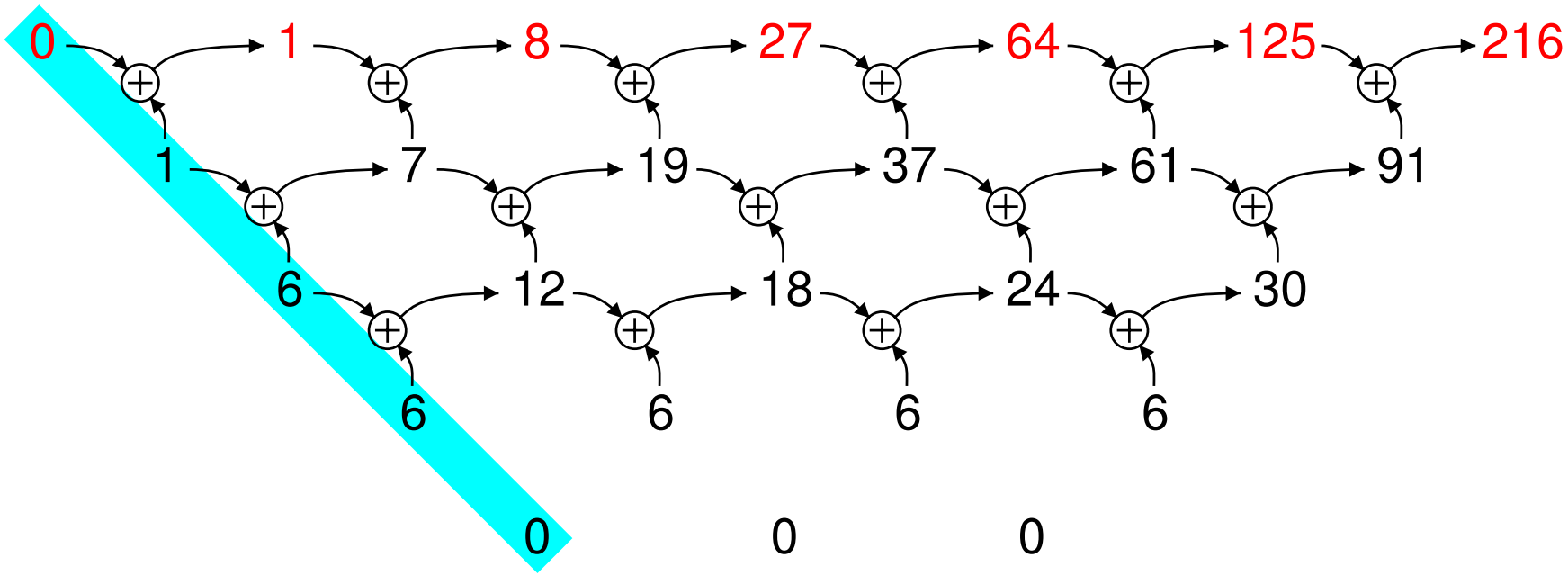
- Base 2, double précision ($p = 53$, mais nombres machine de 54 bits pour pouvoir déterminer les pires cas de la réciproque).
- $2^{13} = 8192$ intervalles $I$ par exposant : $2^{40}$ valeurs, degré $d = 6$ pour $\exp([1, 1 + 2^{-13}[)$.
- $2^{25}$ sous-intervalles $J$ : $2^{15} = 32768$ valeurs, degré 2.
- Degré 2 $\rightarrow$ degré 1 sur $J$ (en négligeant le coefficient de degré 2) pour application du L-algorithme (non décrit ici).

  Si échec :
  - découpage de $J$ en 8 sous-intervalles $K$ de taille 4096, degré 2 ;
  - degré 2 $\rightarrow$ degré 1 sur $K$ pour application du L-algorithme ;
  - si échec, différences tabulées (cf transparent suivant) en degré 2 sur $K$.

Dans la réalité : certaines étapes peuvent être sautées, variantes.

# Calcul des valeurs successives d'un polynôme

Exemple : $P(X) = X^3$. Table des différences :




Coefficients dans la base $\left\{1, X, \frac{X(X-1)}{2}, \frac{X(X-1)(X-2)}{3!}, \ldots\right\}$.

Avantages : uniquement quelques additions par itération, calcul modulo l'ulp.

# Représentation et calcul approché des coefficients

Donnée : polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{\delta} a_i \cdot \binom{X}{i}$ de degré $\delta$.

Les coefficients $a_i$ seront représentés par des éléments $\hat{a}_i \in u_i\mathbb{Z}$ où $u_i = \beta^{-p_i}$, avec une erreur initiale inférieure à $u_i$, et où la suite $(p_i)$ des précisions est croissante.

À chaque itération :

$$\begin{cases} \hat{a}_0 & = & \hat{a}_0 & + & \circ(\hat{a}_1) \\ \hat{a}_1 & = & \hat{a}_1 & + & \circ(\hat{a}_2) \\ & & \vdots & & \\ \hat{a}_{\delta-1} & = & \hat{a}_{\delta-1} & + & \circ(a_\delta) \end{cases}$$

Coefficients tronqués $\rightarrow$ accumulation d'erreurs $< u_i$ sur $a_i$.

Note : dans la pratique, on peut considérer que les coefficients $a_i$ initiaux sont exacts (cf transparent 7). Donc on a une borne d'erreur initiale $\epsilon_i(0)$ sur $a_i$ :

$$\begin{cases} \epsilon_i(0) & = & u_i & \text{pour tout } 0 \leqslant i < \delta, \\ \epsilon_\delta(0) & = & 0 & \text{(arrondi pris en compte lors des additions).} \end{cases}$$

# Passage d'un sous-intervalle au suivant

**Problème :** passer très rapidement d'un sous-intervalle au suivant, i.e. mettre à jour l'approximation polynomiale.

Deux méthodes (idées de départ décrites dans ma thèse) :

1. Mise à jour des coefficients en tenant compte des calculs qui n'ont pas été effectués.
2. Utiliser le fait que les intervalles sont de même longueur, i.e. leur origine est en progression arithmétique.
   $\rightarrow$ Problème similaire au calcul des valeurs successives d'un polynôme, les coefficients étant vus comme des polynômes.

# Méthode 1 : mise à jour des coefficients

De manière générale, cela revient à déterminer les coefficients des polynômes $P_{n+1}(X) = P_n(X + k)$, où $k$ est la taille du sous-intervalle, puis à négliger les coefficients de degré $> d'$.

Avec la base des

$$\binom{X}{i} = \frac{X(X-1)(X-2)...(X-i+1)}{i!}$$

(est-ce ici le meilleur choix ?), on simule la méthode à base de table des différences.

En notant les coefficients initiaux $a_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$, il suffit d'ajouter $\binom{k}{i} a_j$ à $a_{j-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$.

S'ils sont connus et exacts, utiliser les coefficients finaux. $\rightarrow j > d'$.

Ici, $k$ est constant. $\rightarrow$ Multiplications par des constantes entières.

# Application de la méthode 1

Cette méthode n'est utilisée qu'à un seul endroit dans mon code : pour passer d'un intervalle $K$ au suivant (ajout du 2003-02-13).

- Lorsque l'algo rapide a réussi ($\texttt{LOGL} = \log_2 \#K$ ci-dessous) :

```
a0 += a1 << LOGL;
a1 += a2 << LOGL;
a0 += (a2 << (2 * LOGL - 1)) - (a2 << (LOGL - 1));
```

- En cas d'échec, les coefficients ont été mis à jour par la méthode naïve (cf note sur les coefficients finaux, avec $d' = d$).

Dans mon code, les trois coefficients ont la même précision (64 bits), donc le calcul est exact (aucune erreur d'arrondi).

Pour passer d'un intervalle $J$ au suivant, j'utilise la méthode 2...

# Méthode 2 : coefficients vus comme des polynômes

**Idée générale :** Les coefficients (initiaux) des polynômes de degré $d'$ sont vus comme les valeurs successives de polynômes.
$\rightarrow$ Chaque coefficient s'obtient avec la méthode à base de table de différences.

**Notations et définitions :**

- Polynôme $P$ de degré $d$.
- Dans chaque sous-intervalle $J_n$ : polynôme $P_n$ de degré $d$.

$$P_n(m) = P(kn + m) = \sum_{i=0}^{d} a_i(n) \cdot \binom{m}{i}$$

où $0 \leqslant m < k$.

- $P_n$ est approché par $P'_n$ de degré $d'$ :

$$P'_n(X) = \sum_{i=0}^{d'} a_i(n) \cdot \binom{X}{i}.$$

# Méthode 2 : coefficients vus comme des polynômes [2]

On note $\Delta P$ le polynôme tel que $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$.
$\Delta^i P$ est un polynôme de degré $d - i$.

On cherche à calculer les coefficients : $a_i(n) = \Delta^i P_n(0) = \Delta^i P(kn)$.
$\rightarrow$ Les $a_i$ sont des polynômes en $n$ de degré $d - i$.

Les coefficients de ces polynômes $a_i(n+X)$ à l'itération $n$ dans la base des $\binom{X}{j}$ sont : $a_{i,j}(n) = \Delta^j a_i(n)$. On cherche : $a_i(n) = a_{i,0}(n)$.

On les calcule lors du passage du sous-intervalle $J_n$ au suivant $J_{n+1}$ avec :

$$a_{i,j}(n+1) = a_{i,j}(n) + a_{i,j+1}(n) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant d' \\ 0 \leqslant j \leqslant d - i - 1 \end{cases}$$

($a_{i,d-i}$ étant constant). On obtient ainsi les $a_i(n+1)$.

Initialisation : calcul des $a_{i,j}(0)$.

# Application de la méthode 2

**Problème :** pour chaque sous-intervalle, calcul des coefficients des polynômes de degré 2 approchant un polynôme de degré $d = 6$ pour $\exp([1, 1 + 2^{-13}[)$.

3 coefficients pour $P'_n$ : $a_0$ (degré 6), $a_1$ (degré 5), $a_2$ (degré 4).

Le code généré est prévu pour tourner sur machines 32 bits et 64 bits (grâce au préprocesseur). Les $p_i$ sont donc déterminés pour être des multiples de 32 :

$$\begin{cases} p_0 &= 4 \times 32, \\ p_1 &= 5 \times 32, \\ p_2 &= 6 \times 32, \\ p_3 &= 7 \times 32, \\ p_4 &= 9 \times 32, \\ p_5 &= 10 \times 32, \\ p_6 &= 10 \times 32. \end{cases}$$

Les transparents suivants donnent les valeurs initiales (pour machines 64 bits, mots stockés en *little endian*, modulo 1).

# Application de la méthode 2 : coefficient $a_0$ (degré 6)

Code :

```
uint64_t a0_0[] = { 0x3C762E7160F38B4E, 0xA6ABF7160809CF4F };
uint64_t a0_1[] = { 0xABFCA8C900000000, 0x9CA0E833FEB6CB85, 0x5458A4173B436123 };
uint64_t a0_2[] = { 0x354AA25BAAB8404F, 0xCCAFB049B66C0BEA, 0x000002B7E1516295 };
uint64_t a0_3[] = { 0xD8B90AB500000000, 0x3BA51465E493E36F, 0xDF85458A6CF1C94C, 0x000000000000000A };
uint64_t a0_4[] = { 0x16FE154300000000, 0xC4D9DF953D0EDFFB, 0x2A0AC34F5D426FDA, 0x000000002B7E1516, 0x0000000000000000 };
uint64_t a0_5[] = { 0x4F1A4229E540A478, 0xE62637A70A321BD8, 0x00ADF85458A986FD, 0x0000000000000000, 0x0000000000000000 };
uint64_t a0_6[] = { 0x58809CF4F3C762E7, 0x51628AED2A6ABF71, 0x000000000002B7E1, 0x0000000000000000, 0x0000000000000000 };
```

Mis sous forme plus lisible :

```
a0_0 =  A6ABF7160809CF4F 3C762E7160F38B4E
a0_1 =  5458A4173B436123 9CA0E833FEB6CB85 ABFCA8C9
a0_2 =  00000002B7E1516295 CCAFB049B66C0BEA 354AA25BAAB8404F
a0_3 =  000000000000000A DF85458A6CF1C94C 3BA51465E493E36F D8B90AB5
a0_4 =  0000000000000000 00000000002B7E1516 2A0AC34F5D426FDA C4D9DF953D0EDFFB 16FE1543
a0_5 =  0000000000000000 0000000000000000 00ADF85458A986FD E62637A70A321BD8 4F1A4229E540A478
a0_6 =  0000000000000000 0000000000000000 00000000000002B7E1 51628AED2A6ABF71 58809CF4F3C762E7
```

Optimisation possible : suppression de certains mots 0 de poids fort (et $-1$ dans le cas de petits coefficients négatifs). Cela demande de déterminer (au moment de générer le code) des plages des valeurs possibles.

# Application de la méthode 2 : coefficient $a_1$ (degré 5)

Code :

```
uint64_t a1_0[] = { 0x225B715628DDCEBF, 0x5BF0A8B145769AA5 };
uint64_t a1_1[] = { 0x8A29425F00000000, 0xC520B9EFDA13A7F9,
                    0x00000000056FC2A2 };
uint64_t a1_2[] = { 0xD47E77DFB318E888, 0x0015BF0A8B14AE65,
                    0x0000000000000000 };
uint64_t a1_3[] = { 0xD9F0CD6100000000, 0x2A2C53678FA65285,
                    0x00000000000056FC, 0x0000000000000000 };
uint64_t a1_4[] = { 0xCD14C49700000000, 0x561FEAAC8725FFD3,
                    0x0000015BF0A8B150, 0x0000000000000000,
                    0x0000000000000000 };
uint64_t a1_5[] = { 0x7EE2B10139E9E78F, 0x6FC2A2C515DA54D5,
                    0x0000000000000005, 0x0000000000000000,
                    0x0000000000000000 };
```

Mis sous forme plus lisible :

```
a1_0  =  5BF0A8B145769AA5 225B715628DDCEBF
a1_1  =  00000000056FC2A2 C520B9EFDA13A7F9 8A29425F
a1_2  =  0000000000000000 0015BF0A8B14AE65 D47E77DFB318E888
a1_3  =  0000000000000000 00000000000056FC 2A2C53678FA65285 D9F0CD61
a1_4  =  0000000000000000 0000000000000000 00000015BF0A8B150 561FEAAC8725FFD3 CD14C497
a1_5  =  0000000000000000 0000000000000000 0000000000000005 6FC2A2C515DA54D5 7EE2B10139E9E78F
```

# Application de la méthode 2 : coefficient $a_2$ (degré 4)

Code :

```
uint64_t a2_0[] = { 0x85458A2BB500A728, 0x0000000000000ADF };
uint64_t a2_1[] = { 0x05D02CC900000000, 0x0000002B7E151629,
                    0x0000000000000000 };
uint64_t a2_2[] = { 0xADF85458A573315C, 0x0000000000000000,
                    0x0000000000000000 };
uint64_t a2_3[] = { 0x629B3C8800000000, 0x0000000002B7E151,
                    0x0000000000000000, 0x0000000000000000 };
uint64_t a2_4[] = { 0xA9AAFDC500000000, 0x000ADF85458A2BB4,
                    0x0000000000000000, 0x0000000000000000,
                    0x0000000000000000 };
```

Mis sous forme plus lisible :

```
a2_0  =  0000000000000ADF 85458A2BB500A728
a2_1  =  0000000000000000 000000B7E151629 05D02CC9
a2_2  =  0000000000000000 0000000000000000 ADF85458A573315C
a2_3  =  0000000000000000 0000000000000000 000000002B7E151 629B3C88
a2_4  =  0000000000000000 0000000000000000 0000000000000000 000ADF85458A2BB4 A9AAFDC5
```

Note : encore plus de 0 à supprimer, et le mot de poids faible de a2_4 (0xA9AAFDC500000000) est inutile.

# Application de la méthode 2 : additions (code)

```
  do
    {
[...]
    next:
#if GMP_LIMB_BITS == 32
[...]
#else
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_0, (mp_limb_t *) a0_0, (mp_limb_t *) a0_1 + 1, 2);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_1, (mp_limb_t *) a0_1, (mp_limb_t *) a0_2 + 0, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_2, (mp_limb_t *) a0_2, (mp_limb_t *) a0_3 + 1, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_3, (mp_limb_t *) a0_3, (mp_limb_t *) a0_4 + 1, 4);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_4, (mp_limb_t *) a0_4, (mp_limb_t *) a0_5 + 0, 5);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a0_5, (mp_limb_t *) a0_5, (mp_limb_t *) a0_6 + 0, 5);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a1_0, (mp_limb_t *) a1_0, (mp_limb_t *) a1_1 + 1, 2);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a1_1, (mp_limb_t *) a1_1, (mp_limb_t *) a1_2 + 0, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a1_2, (mp_limb_t *) a1_2, (mp_limb_t *) a1_3 + 1, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a1_3, (mp_limb_t *) a1_3, (mp_limb_t *) a1_4 + 1, 4);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a1_4, (mp_limb_t *) a1_4, (mp_limb_t *) a1_5 + 0, 5);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a2_0, (mp_limb_t *) a2_0, (mp_limb_t *) a2_1 + 1, 2);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a2_1, (mp_limb_t *) a2_1, (mp_limb_t *) a2_2 + 0, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a2_2, (mp_limb_t *) a2_2, (mp_limb_t *) a2_3 + 1, 3);
      mpn_add_n((mp_limb_t *) a2_3, (mp_limb_t *) a2_3, (mp_limb_t *) a2_4 + 1, 4);
#endif
    }
  while (i -= K);
```

# Analyse d'erreur

On note essentiellement 3 types d'erreur :

- Approximation de la fonction $f$ par un polynôme $P$.
  Termes d'erreur : reste et arrondi éventuel de chaque coefficient.
  $\rightarrow$ Borne d'erreur $\varepsilon_f$ ou $\varepsilon'_f$ (calcul non abordé ici).
- Approximation du polynôme $P$ de degré $d$ par un polynôme $P'_n$ de degré $d' \leqslant d$, en négligeant les coefficients de degré $> d'$.
  $\rightarrow$ Erreur $\varepsilon_p$ (transparent 25).
- Méthode à base de table de différences (y compris dans la méthode 2) : représentation approchée des coefficients.
  $\rightarrow$ Erreur $\varepsilon_c$ (transparent 26).

Le calcul de bornes sur $\varepsilon_p$ et $\varepsilon_c$ se fait en considérant la table des différences...

# Table des différences et bornes d'erreur

Polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{\delta} a_i \cdot \binom{X}{i}$ de degré $\delta$.

On considère le calcul approché des valeurs successives de ce polynôme par table des différences.

La contribution d'un coefficient $a_i$ sur une valeur $Q(m)$ est : $a_i \cdot \binom{m}{i}$.

- Si un degré $i$ est ignoré (cas de l'approximation de $P$ par $P'_n$), l'erreur correspondante sera de $a_i \cdot \binom{m}{i}$.
- Si $a_i$ est pris en compte dans le calcul, une erreur (ou borne d'erreur) $\epsilon_i$ sur le coefficient $a_i$ donnera une erreur (ou borne d'erreur) de la forme $\epsilon_i \cdot \binom{m}{i}$ sur la valeur à l'itération $m$.

Note : ignorer un coefficient $a_i$ revient à dire que l'erreur correspondante sur ce coefficient est de $a_i$ (le premier point ci-dessus est donc un cas particulier du second).

# Approximation de $P$ par $P'_n$ : analyse d'erreur

Notations : $K = \#I$ et $k = \#J_n$ avec $k|K$, e.g. $K = 2^{40}$ et $k = 2^{15}$.

On a :

$$|\varepsilon_p| = |P(kn+m) - P'_n(m)| = |P_n(m) - P'_n(m)|$$
$$= \left| \sum_{i=d'+1}^{d} a_i(n) \cdot \binom{m}{i} \right| \leqslant \sum_{i=d'+1}^{d} |a_i(n)| \cdot \binom{k-1}{i}$$

avec $a_i(n) = \Delta^i P(kn) = \sum_{j=i}^{d} a_j(0) \cdot \binom{kn}{j-i}$, ce qui donne :

$$\boxed{|\varepsilon_p| \leqslant \sum_{j=d'+1}^{d} |a_j(0)| \sum_{i=d'+1}^{j} \binom{K-k}{j-i}\binom{k-1}{i}}$$

Note : majoration optimale si $a_j(0) \geqslant 0$ pour tout $j \geqslant d'+1$.

# Calcul approché des coefficients : analyse d'erreur

Soit $\epsilon_i(m)$ une majoration de l'erreur sur $a_i$ à l'itération $m$.

Majorations aux limites : $\begin{cases} \epsilon_i(0) &= u_i & \text{pour tout } 0 \leqslant i < \delta, \\ \epsilon_\delta(m) &= 0 & \text{pour tout } m \geqslant 0. \end{cases}$

Relation de récurrence : $\epsilon_i(m) = \epsilon_i(m-1) + \epsilon_{i+1}(m-1) + u_i$.

On en déduit : $\epsilon_i(m) = \sum_{j=i}^{\delta-1} u_j \cdot \binom{m+1}{j-i+1}$.

En effet, c'est vrai pour $m = 0$ et pour $i = \delta$, et $\epsilon_i(m-1) + \epsilon_{i+1}(m-1) + u_i =$

$$u_i + \sum_{j=i+1}^{\delta-1} u_j \cdot \binom{m}{j-i} + \sum_{j=i}^{\delta-1} u_j \cdot \binom{m}{j-i+1}$$

$$= \sum_{j=i}^{\delta-1} u_j \cdot \left[ \binom{m}{j-i} + \binom{m}{j-i+1} \right] = \sum_{j=i}^{\delta-1} u_j \cdot \binom{m+1}{j-i+1} = \epsilon_i(m)$$

Par conséquent : $|\varepsilon_c| \leqslant \max \epsilon_0(m) \leqslant \sum_{i=0}^{\delta-1} u_i \cdot \binom{k}{i+1}$ où $0 \leqslant m \leqslant k-1$.

# Choix de chaque borne d'erreur (mon implémentation)

La borne d'erreur finale $\varepsilon_0$ est déterminée suivant :

- la plage des exposants des valeurs de $f$ sur l'intervalle ;
- le nombre de bits testés (en paramètre, 32 par défaut).

Borne d'erreur maximale acceptable pour $|f(x) - P(x)|$, i.e. reste pour $P$ à coefficients réels (arithmétique d'intervalles) : $\varepsilon_f \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon_0$.
$\rightarrow$ Détermination du degré $d$.

Borne pour les approximations suivantes : $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon_f$.

Borne d'erreur $\varepsilon_p$ due à l'approximation de $P_n$ par un polynôme $P'_n$ de degré 2 sur $J_n$ (coefficients sur 64 bits) : $\varepsilon_p \leqslant \frac{4}{7}\varepsilon_1$.
$\rightarrow$ Détermination de la longueur $k$ des sous-intervalles $J_n$ (cf transparent 25).

# Choix de chaque borne d'erreur (mon implémentation) [2]

Bornes d'erreur dues à l'approximation des coefficients dans $2^{-p_i}\mathbb{Z}$ telles que les coefficients $a_0$, $a_1$ et $a_2$ soient calculés à 64 bits près...

$\rightarrow$ Détermination des $p_i$ ($p_d = p_{d-1}$ car on stocke $\circ(a_d)$ directement) :

```
maple_wr "errmax := 2^(-64): err0 := 0:";
my $nj = 2;
my @n;
for ($j = 0; $j < $d; $j++)
  { maple_wr "b := binomial(np,$j+1):";
    $nj++ while (&maple_getint("errnj := b * 2^(-$nj*32):\n".
      "r := errmax &- ((3/2) * errnj): signum(r[1])") < 0);
    maple_wr "errmax := errmax &- errnj:";
    $n[$j] = $nj; warn "n$j = $nj * 32\n"; }
$n[$d] = $nj; warn "n$d = $nj * 32\n";
my @n64 = map { ($_ + 1) >> 1 } @n;
```

# Futur

- Généraliser.
- Formaliser.
- Recentrer les polynômes pour diminuer l'erreur ou doubler la taille des intervalles.
- Supprimer les calculs sur les mots de poids fort qui valent toujours 0 (pour les valeurs positives) ou $-1$ (pour les valeurs négatives).